Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Michele Serra, Sarah Tanja Hess

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2021

Übungen zur Vorlesung Algebra II
Blatt 3

Abgabe von: Mein Name
Tutor: Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 6 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 3.1 **[2+2 Punkte]**

(a) Erläutern Sie ein Beispiel für einen kommutativen Ring R mit 1, einem endlich erzeugten R-Modul M und einem Untermodul N von M sodass N nicht endlich erzeugt ist.

(b) Erläutern Sie ein Beispiel für einen Hauptidealbereich R und einem torsionsfreien R-Modul M sodass M nicht frei ist.

Lösung:

Aufgabe 3.2 **[1+1+0,5+1+0,5 Punkte]**

Sei R ein Hauptidealbereich, p ein Primelement von R, $\nu \in \mathbb{N}$ und M ein nicht-triviales p^ν-Torsionsmodul von R.

(a) Zeigen Sie, dass für $x \in M$ die Periode von x (bis auf Einheit) durch p^l mit $0 \leq l \leq \nu$ gegeben ist.

(b) Sei ν nun insbesondere minimal sodass M ein p^ν-Torsionsmodul ist. Beweisen Sie die Existenz eines $x \in M$ mit Periode p^ν.

Habe von nun an $x \in M$ die Periode p^ν und sei $\overline{M} := M/Rx$.

(c) Beweisen Sie, dass $\overline{M}$ ein p^ν-Torsionsmodul ist.

(d) Sei $y \in M$ der Periode p^l ein Vertreter von $\overline{y} \in \overline{M}$ mit Periode $p^{\overline{l}}$. Zeigen Sie $\overline{l} \leq l$.

(e) Sei nun ν insbesondere minimal sodass M ein p^ν-Torsionsmodul ist und $\overline{\nu} \in \mathbb{N}$ minimal sodass $\overline{M}$ ein $p^{\overline{\nu}}$-Torsionsmodul ist. Beweisen Sie $\overline{\nu} \leq \nu$.

Lösung:

Aufgabe 3.3 **[2+2 Punkte]**

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Betrachten Sie die Verknüpfung

$$\begin{aligned} \cdot\colon K[X] \times V &\to V \\ (f, v) &\mapsto f(\varphi)(v). \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass V mit $\cdot$ ein $K[X]$-Modul ist.

Sei nun ferner V endlich-dimensional und φ injektiv.

(b) Zeigen Sie, dass V ein endlich erzeugtes $K[X]$-Torsionsmodul ist.

Lösung:

Aufgabe 3.4* **[1+2+1 Punkte]**

Sei K ein Körper und V ein $K[X]$-Modul.

(a) Zeigen Sie, dass V ein K-Vektorraum ist.

(b) Beweisen Sie die Existenz einer eindeutigen K-linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ von $K[X]$-Moduln sodass die Skalarmultiplikation $\cdot$ auf V als $K[X]$-Modul für alle $f \in K[X]$ und $v \in V$ durch $f(x) \cdot v = f(\varphi)(v)$ gegeben ist.

(c) Folgern Sie die Existenz einer Bijektion

$$\phi\colon \{V \mid V \text{ ist } K[X]\text{-Modul}\} \to \{(V, \varphi) \mid V \text{ ist } K\text{-Vektorraum}, \varphi\colon V \to V \text{ ist } K\text{-linear}\}.$$

Lösung:

Abgabe: Bis **Freitag, den 14. Mai 2021, um 10:00 Uhr**, direkt an den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.